Pour chaque entier $n \geq 1$, on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices carrées inversibles de taille n à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On note U_n le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices unitaires.

Le but du problème est d'étudier les sous-groupes finis de U_n et de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. La partie III propose de démontrer le résultat suivant, dû à C. Jordan : *il existe un entier $a(n)$, tel que tout sous-groupe fini G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ possède un sous-groupe abélien distingué d'indice au plus $a(n)$ dans G.*

Les parties II.A, II.B et III sont indépendantes.

Dans le problème, n est un entier fixé ≥ 1 ; il vaut 2 dans la partie II. On désigne par V un espace vectoriel complexe de dimension n ; on note $\mathrm{End}(V)$ l'algèbre des endomorphismes de V et $\mathrm{GL}(V)$ le groupe des automorphismes de V ; on écrit gh, au lieu de $g \circ h$, le composé de deux endomorphismes g et h de V et on note Id_V l'automorphisme identité de V.

Un élément g de $\mathrm{End}(V)$ est dit *diagonalisable* s'il existe une base de V telle que la matrice de g dans cette base soit diagonale ; on dira qu'une partie X de $\mathrm{End}(V)$ est *diagonalisable* s'il existe une base de V telle que la matrice dans cette base de *tout* élément de X soit diagonale.

Une *forme hermitienne* sur V est une application $\Phi : V \times V \to \mathbb{C}$ qui est *sesquilinéaire* (linéaire *à droite*, antilinéaire *à gauche*) et vérifie $\Phi(y,x) = \overline{\Phi(x,y)}$, pour tout x, y dans V. Une telle forme est dite *définie positive* si le nombre réel $\Phi(x,x)$ est strictement positif pour tout vecteur non nul x de V. Si Φ est une forme hermitienne définie positive sur V, une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V est dite *orthonormée pour* Φ si l'on a $\Phi(e_i, e_i) = 1$ et $\Phi(e_i, e_j) = 0$, pour tout i, j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$; un endomorphisme g de V est dit *unitaire pour* Φ si l'on a $\Phi(g(x), g(y)) = \Phi(x,y)$ pour tout x, y dans V.

Première partie

Généralités

Comme indiqué plus haut, V désigne un espace vectoriel *complexe* de dimension finie $n \geq 1$.

I.1. Soient u et v deux éléments de $\mathrm{GL}(V)$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, posons :

$$t = vuv^{-1},\ U_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id_V) \text{ et } T_\lambda = \mathrm{Ker}(t - \lambda Id_V).$$

(a) Calculer T_λ en fonction de U_λ et v.

(b) On suppose que u et v commutent ; montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $v(U_\lambda) = U_\lambda$.

(c) On suppose que u et v commutent et que v est diagonalisable ; montrer que, pour toute valeur propre λ de u, v induit un endomorphisme diagonalisable de U_λ.

I.2. Prouver qu'un élément d'ordre fini de $\mathrm{GL}(V)$ est diagonalisable.

I.3. Soit X une partie de $\mathrm{End}(V)$ formée d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Montrer que X est diagonalisable. (On pourra distinguer le cas où tous les éléments de X sont des homothéties).

I.4. Il est clair d'après I.2 et I.3 qu'un sous-groupe *abélien fini* de $\mathrm{GL}(V)$ est diagonalisable. Donner, sous forme matricielle, un sous-groupe abélien infini de $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$ qui ne soit pas diagonalisable.

I.5. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$. À partir d'une forme hermitienne définie positive Ψ sur V, construire une forme hermitienne définie positive Φ sur V telle que G soit formé d'endomorphimes *unitaires* pour Φ.

I.6. En déduire qu'un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de U_n.

Désormais, V désigne un espace vectoriel *hermitien* de dimension $n \geq 1$, c'est-à-dire un espace vectoriel complexe de dimension $n \geq 1$, muni d'une forme hermitienne définie positive Φ. Selon l'usage, on parlera de base orthonormée au lieu de base orthonormée pour Φ, et d'endomorphisme unitaire au lieu d'endomorphisme unitaire pour Φ. Les endomorphismes unitaires de V forment un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ noté $\mathrm{U}(V)$; on note $\mathrm{SU}(V)$ le sous-groupe de $\mathrm{U}(V)$ formé des endomorphismes de déterminant 1.

Pour $g \in \mathrm{End}(V)$, on note $g^\star$ l'endomorphisme adjoint de g ; il est caractérisé par la condition $\Phi(g(x), y) = \Phi(x, g^\star(y))$ pour tout x, y dans V. L'endomorphisme g est *hermitien* si $g^\star = g$, *unitaire* si $g^\star g = Id_V$.

Si W est un espace vectoriel complexe, on peut restreindre à $\mathbb{R} \times W$ la loi de multiplication par les scalaires $\mathbb{C} \times W \to W$; on obtient alors sur le groupe additif de W une structure d'espace vectoriel réel, qu'on appelle espace vectoriel *réel sous-jacent* à W.

Si E est un espace vectoriel réel et q une forme quadratique définie positive sur E, une *isométrie* de q est un endomorphisme u de E tel que $q(u(x)) = q(x)$ pour tout $x \in E$; les isométries de q forment un sous-groupe noté $\mathrm{O}(q)$ du groupe des automorphismes de E, et on note $\mathrm{SO}(q)$ le sous-groupe de $\mathrm{O}(q)$ formé des éléments de déterminant 1.

Deuxième partie

Le cas où n vaut 2

Dans cette partie, V est un espace vectoriel *hermitien* de dimension $n = 2$; on note Φ la forme hermitienne définie positive donnée sur V.

II.A.- On note E l'ensemble des éléments hermitiens de $\mathrm{End}(V)$ dont la trace est nulle. Pour $x \in E$, on pose $q(x) = -\det(x)$.

II.A.1. Il est clair que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel *réel* sous-jacent à $\mathrm{End}(V)$.

a) Calculer la dimension de E sur $\mathbb{R}$.

b) Prouver que q est une forme quadratique définie positive sur E.

c) Calculer la forme bilinéaire symétrique $B : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que $B(x, x) = q(x)$ pour tout $x \in E$. (On pourra répondre à ces questions en termes de matrices des éléments de $\mathrm{End}(V)$ dans une base orthonormée de V).

II.A.2. Soient $a \in \mathrm{U}(V)$ et $x \in E$. Montrer que $axa^{-1} \in E$.

Pour $a \in \mathrm{U}(V)$, on note $\varphi(a)$ l'application $x \mapsto axa^{-1}$ de E dans E ; il est immédiat que c'est un endomorphisme de E.

II.A.3. Montrer que pour tout $a \in \mathrm{U}(V)$, $\varphi(a)$ est une isométrie de q.

L'application $\varphi : a \mapsto \varphi(a)$ de $\mathrm{U}(V)$ dans $\mathrm{O}(q)$ ainsi obtenue est un homomorphisme de groupes (on ne demande pas de le vérifier).

II.A.4. a) Déterminer le noyau de φ.

b) Soit a un élément de $\mathrm{U}(V)$ qui n'est pas dans le noyau de φ. Montrer que $\varphi(a)$ est une rotation de E, et préciser, après le choix d'une orientation de E, un couple (axe,angle) de cette rotation, en termes de vecteurs propres et valeurs propres de a. (On fixera une base orthonormée de V formée de vecteurs propres de a et on considérera les matrices des éléments de $\mathrm{End}(V)$ dans cette base).

c) Déterminer l'image de φ.

II.A.5. Montrer que $\mathrm{SU}(V)$ contient un sous-groupe fini G dont tout sous-groupe abélien distingué est d'indice au moins 60. (On pourra utiliser le groupe des isométries positives d'un icosaèdre régulier, en *admettant* qu'un espace affine euclidien de dimension 3 contient un tel icosaèdre).

II.B.- On se donne un sous-groupe fini G de $\mathrm{U}(V)$. On note Z le sous-groupe de G formé des homothéties qui appartiennent à G (de sorte que Z est inclus dans le centre de G) et on note H le groupe quotient de G par son sous-groupe distingué Z. On note m le cardinal de H, et on suppose G distinct de Z, de sorte que $m \geq 2$.

Les éléments de G qui ne sont pas dans Z ont exactement 2 droites propres (qui sont d'ailleurs orthogonales). On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites de V ainsi obtenues.

II.B.1 a) Montrer que si $D \in \mathcal{D}$ et $g \in G$, alors $g(D)$ est dans $\mathcal{D}$.

b) Montrer que l'application $(g, D) \mapsto g(D)$ de $G \times \mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ induit une action sur $\mathcal{D}$ du groupe $H = G/Z$.

On note cette action $(h, D) \mapsto h.D$. Pour chaque élément D de $\mathcal{D}$, on note e_D le cardinal du stabilisateur de D dans H.

II.B.2 a) Prouver qu'on a $e_D \geq 2$ pour $D \in \mathcal{D}$.

b) Prouver l'égalité :

$$2(m-1) = \sum_{D \in \mathcal{D}} (e_D - 1).$$

II.B.3 Si D et D' sont des éléments de $\mathcal{D}$ dans la même orbite pour l'action de H, montrer que l'on a $e_D = e_{D'}$.

On note Ω_1, ..., Ω_r les orbites de $\mathcal{D}$ pour l'action de H. Pour $i = 1, .., r$, on note e_i la valeur commune des e_D pour $D \in \Omega_i$. On suppose les orbites rangées de manière à avoir $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_r$.

II.B.4 a) Calculer

$$\sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{e_i}\right),$$

en fonction de m.

b) Montrer qu'on a $r = 2$ ou 3.

II.B.5 Si r vaut 2, montrer que G est abélien.

II.B.6 Si r vaut 3 et qu'on a $e_1 = e_2 = 2$, $e_3 \geq 2$, établir que G possède un sous-groupe abélien distingué d'indice 2.

II.B.7 En examinant les possibilités autres que celles envisagées en II.B.5 et II.B.6, montrer que tout sous-groupe fini G de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ possède un sous-groupe abélien distingué d'indice au plus 60 dans G.

Troisième partie

La méthode de Frobenius

Dans cette partie, n est un entier quelconque ≥ 2, et V un espace vectoriel *hermitien* de dimension n. On note Φ la forme hermitienne définie positive donnée sur V.

III.A.- Dans cette section on fixe un nombre réel $\tau \in [0, \pi/2[$ et un élément v de $\mathrm{U}(V)$. On suppose que pour chaque valeur propre γ de v, il existe $\theta \in [-\tau, +\tau]$ tel que $\gamma = e^{i\theta}$.

III.A.1 Montrer que pour tout vecteur non nul x de V, il existe un nombre réel $r > 0$ et un nombre réel $\alpha \in [-\tau, +\tau]$, tel que

$$\Phi(v(x), x) = re^{i\alpha}.$$

III.A.2 Soit u un élément de $\mathrm{U}(V)$. Posons $t = vuv^{-1}$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, posons $U_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id_V)$, $T_\lambda = \mathrm{Ker}(t - \lambda Id_V)$, et notons $U_\lambda^\perp$ l'orthogonal de U_λ dans V.

a) Prouver qu'on a :

$$T_\lambda \cap U_\lambda^\perp = \{0\}.$$

b) On suppose de plus que u et t commutent. Montrer qu'on a $T_\lambda = U_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, de sorte que $t = u$ et que u et v commutent.

III.A.3 Soit s un élément de $\mathrm{U}(V)$. On suppose que pour chaque valeur propre σ de s, il existe $\alpha \in [-\tau, +\tau]$ tel que $\sigma = e^{i\alpha}$. Prouver que pour toute valeur propre μ de vs^{-1}, il existe $\beta \in [-2\tau, +2\tau]$, tel que $\mu = e^{i\beta}$. (On pourra considérer un vecteur x de V tel que $(v - \mu s)(x) = 0$).

Pour $g \in \mathrm{End}(V)$, on note $N(g)$ la trace de $g^\star g$. Si $A = [a_{i,j}]$ est la matrice de g dans une base orthonormée de V, on a $N(g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2$, de sorte que $g \mapsto N(g)$ est une forme quadratique définie positive sur l'espace vectoriel réel E sous-jacent à $\mathrm{End}(V)$. On note $g \mapsto \|g\| = \sqrt{N(g)}$ la norme euclidienne correspondante sur l'espace vectoriel E.

III.A.4 Montrer que, quel que soit $u \in \mathrm{U}(V)$ on a

$$N\left(vuv^{-1}u^{-1} - Id_V\right) \leq 4\sin^2(\tau) N\left(u - Id_V\right).$$

(On pourra, en prenant une base de vecteurs propres de v, estimer $N(v(u - Id_V) - (u - Id_V)v)$.)

III.B.- Dans cette section, G désigne un sous-groupe *fini* de $\mathrm{U}(V)$. On note S l'ensemble des éléments s de G tels que pour toute valeur propre σ de S, il existe $\alpha \in]-\pi/6, \pi/6[$ tel que $\sigma = e^{i\alpha}$. On note A le sous-groupe de G engendré par S.

III.B.1 Soient v un élément de S et u un élément de G. On définit par récurrence sur l'entier naturel k, un élément u_k de $\mathrm{U}(V)$, en posant :

$$u_0 = u \text{ et } u_{k+1} = v u_k v^{-1} u_k^{-1}, \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer qu'on a $u_k = Id_V$ pour k assez grand.

b) On suppose en outre que pour toute valeur propre λ de u, on peut trouver $\theta \in]-\pi/2, +\pi/2[$ tel que $\lambda = e^{i\theta}$. Montrer que u et v commutent. (On pourra remarquer que, pour $k \geq 1$, dire que $u_{k+1} = Id_V$ signifie que v commute à $u_{k-1} v u_{k-1}^{-1}$).

III.B.2 Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif η, indépendant de n, tel que deux éléments de g et h de G vérifiant $N(g-h) < \eta$ vérifient aussi $h^{-1}g \in S$.

III.B.3 Prouver que l'indice de A dans G vaut au plus

$$a(n) = \left(2\sqrt{\frac{n}{\eta}} + 1\right)^{2n^2} - \left(2\sqrt{\frac{n}{\eta}} - 1\right)^{2n^2}.$$

(Prendre un système de représentants de G/A dans G ; il sera commode de noter m la mesure de la boule unité de l'espace vectoriel euclidien E).

III.B.4 Conclure en prouvant le théorème de Jordan : *tout sous-groupe fini G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ possède un sous-groupe abélien distingué d'indice au plus $a(n)$ dans G.*